I Compitino di Algebra II
16/11/05

Esercizio 1 Si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 9 & 2 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

e

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 2 & 4 & 3 & 6 & 10 & 1 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

in S_{10} Trovare la loro decomposizione in cicli disgiunti e scrivere, ancora come prodotto di cicli disgiunti, le permutazioni $\sigma\tau$ e $\sigma^{-1}\tau\sigma$. Trovare gli ordini di $\sigma, \tau, \sigma\tau$ e $\sigma^{-1}\tau\sigma$

Esercizio 2 Sia $G = \{m/n \in \mathbb{Q} \mid (m, n) = 1, \text{ e } n \mid 18\}$. Si provi che $G \leq \mathbb{Q}$. Determinare $\mid G : \mathbb{Z} \mid$ e $\mid G : 6\mathbb{Z} \mid$.

Esercizio 3 Si consideri l'insieme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dimostrare che, rispetto all'usuale prodotto tra matrici, G è un gruppo. Dimostrare che $Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ e che $G/Z(G)$ è abeliano.

Esercizio 4 Siano Ω un insieme non vuoto e $G = \mathrm{Sym}(\Omega)$. Per ogni sottoinsieme $\Delta \subseteq \Omega$ e per ogni $g \in G$, si ponga $\Delta.g = \{(\delta)g \mid \delta \in \Delta\}$. Se $\mathcal{P}$ è l'insieme delle parti di Ω, dimostrare che la funzione $\Phi : \mathcal{P} \times G \longrightarrow \mathcal{P}$ che associa alla coppia (Δ, g) l'elemento $\Delta.g$ è un'azione di G su $\mathcal{P}$. Determinare il nucleo dell'azione. Nel caso in cui Ω sia finito si descrivano le orbite di G e, quando $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ si determini lo stabilizzatore in $G = S_4$ di $\Delta = \{1, 4\}$.

Esercizio 5 Siano p un primo e G un gruppo di ordine p^3.

1. Si provi che $Z(G)$ ha ordine p oppure G è abeliano.
2. Si provi che, se G non è abeliano, allora $G/Z(G)$ è abeliano ed ogni suo elemento ha ordine p.
3. Se G non è abeliano si dimostri che, se $N \leq G$ e $Z(G) \leq N$, allora N è normale in G. Viceversa provare che, se N non è normale in G, allora $N \cap Z(G) = 1$ ed N è ciclico.