I Compitino di Algebra II
16/11/07

Esercizio 1 Si considerino i seguenti elementi del gruppo simmetrico S_9 su 9 oggetti

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 9 & 3 & 8 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Scrivere σ e τ come prodotto di cicli disgiunti. Calcolare $\sigma\tau$ e $\tau^{-1}\sigma\tau$. Determinare il periodo di σ e quello di τ. Dire quanti sottogruppi possiede il sottogruppo $\langle\sigma\rangle$.

Esercizio 2 Sia G il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dimostrare che la funzione $\sigma : G \longrightarrow G$ definita da $\sigma((a, x+\mathbb{Z})) = (2a, a/3 + x + \mathbb{Z})$ è un morfismo di gruppi. Trovare $\ker(\sigma)$ e dire se σ è suriettivo. Si consideri ora la funzione $\tau : G \longrightarrow G$ definita da $\tau((a, x + \mathbb{Z})) = (3a, 2x + \mathbb{Z})$. Provare che τ è un morfismo e che $\mathrm{Im}(\tau)$ è un sottogruppo normale di G. Trovare l'ordine di $G/\mathrm{Im}(\tau)$ e dire se è un gruppo ciclico.

Esercizio 3 Sia $\sigma : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'automorfismo definito da $\sigma(x) = -x$. Nell'insieme $G = \mathbb{Q} \times \langle\sigma\rangle$ definiamo la seguente operazione $(a, \alpha)(b, \beta) = (a + \alpha(b), \alpha\beta)$. Con questa operazione G è un gruppo (**questo non lo dovete dimostrare**).

1. Trovare il centro di G.
2. Sia A un sottogruppo di $\mathbb{Q}$. Provare che $K(A) = \{(a, 1) \mid a \in A\}$ è un sottogruppo normale di G.
3. Posto $H = \langle(0, \sigma)\rangle$, dimostrare che $G = HK(\mathbb{Q})$.
4. Dimostrare che $G/K(\mathbb{Z})$ non è abeliano e che ogni suo elemento ha periodo finito.

Esercizio 4 Dato V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbb{F}$, sia G il gruppo delle applicazioni $\mathbb{F}$-lineari invertibili su V. Definiamo $\Omega = \{W \mid W \text{ è sottospazio vettoriale di } V\}$. Dimostrare che la funzione $\Phi : G \times \Omega \longrightarrow \Omega$ data da $\Phi(g, W) = g.W = g(W)(= \{g(w) \mid w \in W\})$ è un'azione. Trovarne il nucleo e descriverne le orbite.

Esercizio 5 Siano G un gruppo ed S un suo sottoinsieme tale che $G = \langle S\rangle$. Dimostrare che $g \in Z(G)$ se e solo se $gx = xg$ per ogni $x \in S$. Se $N \leq G$ dimostrare che N è normale se e solo se $N^x = N$ per ogni $x \in S$.